Theoretische Physik II (Elektrodynamik)

SS04, Studienziel Diplom (**160 203**)

Dozent: J. König   Übung: M.Braun, B.Kubala, J.Splettstößer, D.Urban

Übungsblatt 8

Abgabe: 22.06.04 vor der Vorlesung

Aufgabe 29 : Das Vektorpotential in der Mechanik *(4 Punkte)*

Im Lagrange-Formalismus koppelt ein Teilchen an das Vektorpotential durch die sog. minimale Substitution $\dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}} + \frac{q}{m}\vec{A}$. Im nichtrelativistischen Limes erhält man für die Lagrange Funktion:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi + q\dot{\vec{r}}\vec{A} \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die Teilchenkoordinate r_i [zur Erinnerung $\vec{A}(\vec{r}\,) = \vec{A}(\vec{r}(t))$].

(b) Zeigen Sie, dass der gefundenen Ausdruck der Lorentz-Kraft entspricht.

(c) Setzen Sie die spezielle Wahl der Potentiale $\vec{A}(\vec{r}\,) = (0, xB, 0)$ und $\Phi(\vec{r}\,) = -xE + \Phi_0$ in die Bewegungsgleichung ein. Welche Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$ werden durch diese Potentiale beschrieben?

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen im Magnetfeld für $\vec{E} = \vec{0}$.

(e) Gewinnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen im Magnetfeld für $\vec{E} = (E, 0, 0)$ (evtl. mit der Substitution $y(t) = \tilde{y}(t) - (E/B)t$).
Skizzieren Sie die Lösung für ein Teilchen, das zur Zeit $t = 0$ im Ursprung ruht.

Aufgabe 30 : Magnetisches Dipolfeld *(2 Punkte)*

Das Vektorpotential eines Dipolmomentes $\vec{m}$ ist gegeben durch:

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \ . \tag{2}$$

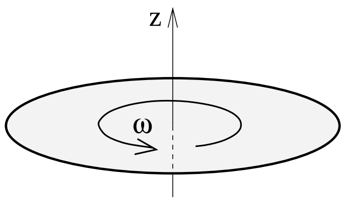
Leiten Sie den Ausdruck

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \tag{3}$$

für das magnetische Feld her.
Skizzieren Sie das Feld eines magnetischen Dipols $\vec{m} = m\hat{e}_z$.

Aufgabe 31 : Magnetisches Dipolmoment einer rotierenden Scheibe *(3 Punkte)*

Es soll das magnetische Dipolmoment einer geladenen, rotierenden Scheibe berechnet werden.



(a) Wir betrachten dafür zunächst eine kreisrunde Leiterschlaufe vom Radius R, in der der Strom I fliesst.

(a.1) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Leiterschlaufe.

(a.2) Das Dipolmoment kann durch die vom Leiter umschlossene Fläche ausgedrückt werden. Gilt dies auch für nicht kreisförmige Leiterschleifen?

(a.3) Berechnen Sie das magnetische Dipolfeld auf der z-Achse und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis aus Aufgabe 26.

(b) Berechnen Sie nun das magnetische Dipolmoment einer homogen geladenen, rotierenden Kreisscheibe mit Radius R unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe (a.1).

Aufgabe 32 : Der Skin-Effekt *(3 Punkte)*

Die Raumhälfte $z < 0$ bestehe aus einem Metall mit der Leitfähigkeit σ. Durch dieses Metall fliesse ein elektrischer Wechselstrom (Winkelgeschwindigkeit ω) in x-Richtung. Gesucht wird die sich ergebende Stromdichte $j(\vec{r}\,)$ innerhalb des Leiters, welche sich aus den Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \text{und} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \qquad \text{ergibt.}$$

Dabei kann für moderate Frequenzen der Term $\dot{\vec{E}}$ vernachlässigt und $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ angenommen werden (quasistationäre Näherung).

(a) Entkoppeln Sie das System von Differentialgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Benutzen Sie dabei das Ohmsche Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\vec{E}$ und geben Sie die physikalische Lösung an.

Physikalisch/technische Konsequenzen: Hochfrequente Wechselströme erzeugen innerhalb des Leiters Wirbelströme/Magnetfelder. Diese reduzieren die Stromdichte im Innern und der Stromfluss beschränkt sich auf eine Haut (Skin) an der Oberfläche des Leiters. Dieser Effekt motiviert für Wechselströme im kHz Bereich die Verwendung von Litzen anstelle massiver Kabel.