RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 16.05.07
Besprechung: Musterlösung

Aufgabe 14: Übungen zur kovarianten Schreibweise *(4 Punkte)*
In der kovarianten Notation fasst man die Zeit- und Raumvariablen zu einem Viererortsvektor $x^\nu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \boldsymbol{x})$ und Energie sowie Impuls zum Viererimpuls $p^\nu = (p^0 = E/c, \boldsymbol{p})$ zusammen. Des weiteren definiert man den kovarianten Gradientenvektor $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (man beachte Stellung der Indizes). Der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

überführt einen kontravarianten Vektor $b^\nu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ in den Kovarianten $b_\nu = g_{\nu\mu} b^\mu = (b^0, -b^1, -b^3, -b^3)$, also auf gut deutsch $g_{\mu\nu}$ "loweres" (bzw. $g^{\mu\nu}$ "raises") den Summationsindex. Die hierbei benutzte Summenkonvention wird auf der Rückseite des Übungsblattes kurz zusammengefasst.

(a) Berechnen Sie $x_\nu x^\nu$, $p_\nu p^\nu$, und $g_{\nu\lambda}\partial^\lambda \partial^\nu$.

(b) Was unterscheidet die beliebige 4x4 Matrix $G_{\mu\nu}$ von der Matrix $G^{\mu\nu}$? Was bedeutet dies insbesondere für die metrischen Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$?

(c) Bestätigen Sie, dass g mit gemischten Indizes das Kroneker-Delta darstellt: $g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$.

Aufgabe 15: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen *(7 Punkte)*
Analog zum Viererort und Impuls definiert man die Viererstromdichte $j^\nu = (j^0 = c\rho, \boldsymbol{j})$, und das Viererpotential $A^\nu = (\Phi/c, \boldsymbol{A})$. Des weiteren führt man den Feldtensor $F^{\mu\nu}$ ein:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{3}$$

(b) Überprüfen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{4}$$

Gehen Sie wie folgt vor:
(b.1) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$
(b.2) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?
(b.3) Überlegen Sie sich den Fall zwei gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$. $\left(\text{Tip: } F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}\right)$
(b.4) Behandeln Sie explizit die letzten 4 Fälle.

Aufgabe 16 : Kovariante Elektrodynamik *(3 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda \tag{5}$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion sei. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

(b) Berechnen Sie den Ausdruck

$$\partial_\mu j^\mu \tag{6}$$

Schreiben Sie die entstehende Gleichung um in die Darstellung mit ∇ und ∂_t. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?

Aufgabe 17 : Klein-Gordon Gleichung mit elektrischem Potential *(6 Punkte)*

Gegeben ist die kräftefreie Klein-Gordon Gleichung

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0\,. \tag{7}$$

Die Kopplung an ein elektromagnetisches Feld $A^\nu = (\Phi/c, \boldsymbol{A})$ geschieht mittels der minimalen Kopplung $i\hbar\partial_\nu = p_\nu \;\to\; p_\nu - eA_\nu$.

(a) Benutzen Sie den Ansatz $\psi(t, \boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x})e^{-iEt/\hbar}$, um die Klein-Gordon Gleichung mit einem elektrischen Potential in die folgende Form zu bringen:

$$(E - e\Phi)^2\psi(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{p}^2c^2 + m^2c^4\right]\psi(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

(b) Falls Φ ortsunabhängig ist, dann ist $\psi(x)$ ein Impulseigenzustand, und der Operator $\boldsymbol{p}$ kann durch den Eigenwert ersetzt werden kann. Leiten Sie unter dieser Bedingung aus Gleichung (8) die erste relativistische Korrektur der kinetischen Energie, die sog. relativistische Massenkorrektur her.

Anmerkung: Falls Φ nicht-trivial ortsabhängig ist, so ergeben sich noch weitere Korrekturen in der Ordnung $1/mc^2$, insbesondere der Darvin-Term $\propto \nabla^2\Phi$ und (für spinbehaftete Teilchen) die Spin-Bahn Kopplung $\propto \frac{d}{dr}\Phi$.

Anmerkungen zur Notation

(a) Summenkonvention: Über zwei gleiche (ein unterer und ein oberer) Indizes wird summiert. Tip: Falls gleiche Indizes gemeinsam unten/oben liegen, dann liegt im allgemeinen ein Fehler vor.

(b) Römische Indizes laufen von 1 bis 3, oder über x, y und z.
Griechische Indizes laufen über 0 bis 3, bzw. über ct, x, y und z.