RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: M. Braun & T. Barthel
SS07, Nr. **07ss-17572**

Quantentheorie II

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 04.07.07
Besprechung: Donnerstag, 05.07.07, 14:00 in 26C402

Aufgabe 29 : Einführung zur Dichtematrix *(5 Punkte)*
Oftmals kann man ein Quantensystem nicht vollständig präparieren, sondern einige Freiheitsgrade bleiben unbestimmt. Das System befindet sich dann in einem sog. gemischten Zustand, den man durch eine Dichtematrix beschreibt. Präpariert man z.B. das System mit den Wahrscheinlichkeiten p_m im den jeweiligen Zuständen $|\psi_m\rangle$, dann ist die Dichtematrix gegeben durch

$$\rho = \sum_m p_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \,. \tag{1}$$

Hier bezeichnet $|\psi_m\rangle$ mit $m = 1, 2, 3, ...$ ein vollständiges Orthonormalsystem.
Ist einer der p_m gleich eins, die Dichtematrix also gegeben durch

$$\rho = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,, \tag{2}$$

so spricht man von einem reinen Zustand. In diesem Spezialfall könnte man das System auch einfach (wie bisher) durch den Zustandsvektor $|\psi_i\rangle$ beschreiben.

(a) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert eines Operators A in einem gemischten Zustand

$$\langle A\rangle = \sum_m p_m \langle\psi_m|A|\psi_m\rangle \,, \tag{3}$$

gegeben ist durch $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}[\, A\, \rho\,]$, wobei Tr die Spur bezeichnet.

(b) Überprüfen Sie, dass $\mathrm{Tr}[\,\rho\,] = 1$.

(c) Warum ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gemischten Zustand genau den Eigenzustand $|\psi_i\rangle$ zu finden/messen, gegeben durch $\mathrm{Tr}[\,\rho\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\,]$?

(d) Gegeben seinen zwei verschiedene Basissysteme $\{|\psi_m\rangle\}$ und $\{|\phi_n\rangle\}$. Demonstrieren Sie, dass die Spur eines Operators A unabhängig von der Basis ist, also dass

$$\mathrm{Tr}[A] = \sum_m \langle\psi_m|A|\psi_m\rangle = \sum_n \langle\phi_n|A|\phi_n\rangle \,. \tag{4}$$

(e) Zeigen Sie, dass für einen reinen Zustand $\mathrm{Tr}[\rho^2] = 1$, und für einen gemischten Zustand $\mathrm{Tr}[\rho^2] < 1$ gilt.

(f) Leiten Sie aus der Schrödinger Gleichung $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_m\rangle = H|\psi_m\rangle$ die Zeitentwicklung der Dichte-Matrix, die sog. von Neumann Gleichung her.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] \tag{5}$$

bitte wenden

Aufgabe 30: Anwendung: Das Spin 1/2 System *(5 Punkte)*

Gegeben seien zwei Spinsysteme, welche durch die folgenden Dichtematritzen beschrieben werden

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-i\alpha} \\ e^{+i\alpha} & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Als Basiszustände wählten wir die Eigenzustände der σ_z Pauli-Matrix, also $|\uparrow\rangle = (1,0)^T$ und $|\downarrow\rangle = (0,1)^T$

(a) Sind dies reine oder gemischte Zustände?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in den beiden Systemen, bei einer Messung einen "up" -Spin zu finden?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert des Spins in den 3 Raumrichtungen ($\langle\sigma_x\rangle$, $\langle\sigma_x\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$).

Aufgabe 31: Der Bloch Vektor *(5 Punkte)*

Jede 2×2 (Dichte-)Matrix kann als Linearkombination der Einheitsmatrix und der drei Pauli-Matritzen σ_i dargestellt werden

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{1} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big). \tag{7}$$

Die Entwicklungskoeffizienten bilden den sog. Bloch-Vektor $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$.

(a) Berechnen Sie zuerst $\mathrm{Tr}[\sigma_i\sigma_j]$.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\boldsymbol{P} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$.

(c) Wenn ρ einen reinen Zustand beschreibt, was folgt daraus für $\boldsymbol{P}$?

(d) Obige Entwicklung impliziert, dass die Zeitentwicklung der Dichtematzrix $\rho = \rho(t) = \rho(\boldsymbol{P}(t))$ vollständig durch den Bloch Vektor beschrieben ist. Gegeben sei der Hamiltonian $H = -\gamma\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Berechnen Sie $d\boldsymbol{P}/dt$.

Aufgabe 32: Die partielle Spur *(5 Punkte)*

Betrachten wir ein Quantensystem, welches sich aus zwei Subsystemen A und B zusammensetzt. Die orthonormalen Basiszustände der Hilberträume H_A und H_B sind gegeben durch $\{|i\rangle_A\}$ und $\{|\mu\rangle_B\}$. Damit kann jeder reine Zustand $|\psi\rangle_{AB}$ des Gesammtsystems ($H_A \otimes H_B$) dargestellt werden durch die Entwicklung

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i,\mu}\, |i\rangle_A\, |\mu\rangle_B\,, \tag{8}$$

mit der Normierung $\sum_{i,\mu}|a_{i,\mu}|^2 = 1$. Der Operator $M_A \otimes 1_B$ wirkt nur auf das Subsystem A.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\langle M_A\rangle = {}_{AB}\langle\psi|M_A \otimes 1_B|\psi\rangle_{AB} = \mathrm{Tr}_A[M_A\,\rho_A]\,, \tag{9}$$

und bestimmen sie die sogenannte reduzierte Dichtematrix des Systems A. Dabei ist $\mathrm{Tr}_A = \sum_k {}_A\langle k|...|k\rangle_A$ die Spur über die Freiheitsgrade von System A.

(b) Demonstrieren Sie, dass

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B[\,|\psi\rangle_{AB}\,{}_{AB}\langle\psi|\,] \tag{10}$$

(c) Als Beispiel betrachten wir zwei Spin 1/2 Systeme mit den jeweiligen Basisvektoren $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Gegeben sei der Zustand

$$|\psi\rangle_{AB} = u|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B + v|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B \tag{11}$$

Berechnen Sie die volle Dichtematrix $\rho = |\psi\rangle_{AB}\,{}_{AB}\langle\psi|$ und die reduzierte Matrix ρ_A des Systems A. Beschreiben diese Dichtematritzen reine oder gemischte Zustände?