RWTH AACHEN

Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 6

Abgabe: Montag, 03.12.07
Besprechung: Freitag, 07.12.07

Aufgabe 23 : Integration II *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die folgenden Integrale mittels eines geeigneten Lösungsweges

(a) $\int \mathrm{d}\varphi \, (\cos^n \varphi) \sin \varphi$ (Vorsicht bei $n = -1$)

(b) $\int \mathrm{d}x \, \sin \sqrt{x}$

(c) $\int \mathrm{d}x \, \tanh x$

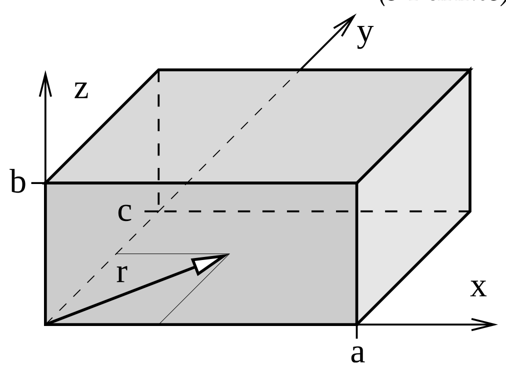
(d) $\int \mathrm{d}x \, \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

Aufgabe 24 : Trägheitsmomente *(5 Punkte)*

Das Trägheitsmoment ist gegeben durch das Integral über das Körpervolumen

$$I = \int dx\, dy\, dz\, r^2 \cdot D(x, y, z)$$

wobei $D(x, y, z)$ die (eventuell ortsabhängige) Dichte, und r die Distanz zwischen dem Volumenelement und der Drehachse bezeichnet.



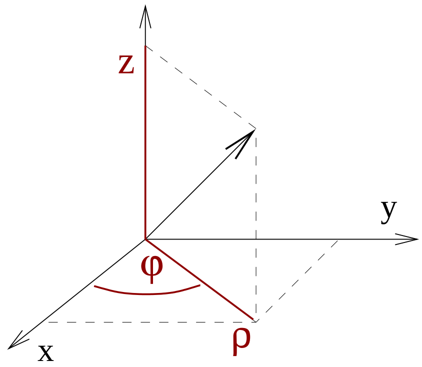
(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_k eines Quaders mit konstanter Dichte, der um die Kante an der z-Achse rotiert ($\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_s eines Quaders, der in der selben Ausrichtung, aber um seinen Schwer/Mittelpunkt rotiert.

(c) Überprüfen sie den *Satz von Steiner*, welcher besagt, dass $I_k = I_s + h^2\, m$. Was ist m, und was ist h?

bitte wenden

Aufgabe 25: Zylinderkoordinaten *(5 Punkte)*



Die am häufigsten benutzten Koordinatensysteme sind die kartesischen Koordinaten (x, y, z), Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), und Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ). Im Allgemeinen ist es ratsam dasjenige Koordinatensystem zu benutzen, welches dieselbe Symmetrie aufweist wie das zu betrachtende Problem.
Der Zusammenhang zwischen kartesischen- und Zylinderkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Bei Raumintegralen ist zu beachten, dass das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ in Zylinderkoordinaten $\mathrm{d}V = \rho \cdot \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z$ proportional zu ρ anwächst, sodass im Integrand ein zusätzliches ρ auftaucht ($\rightarrow$ Jacobi-Determinante):

$$\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\ f(x, y, z) \quad = \quad \int \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}z\, f(\rho, \varphi, z) \cdot \rho \qquad \text{wobei } 0 \le \varphi \le 2\pi$$

(a) Bestimmen Sie ρ, φ, und z als Funktionen von x, y, z.

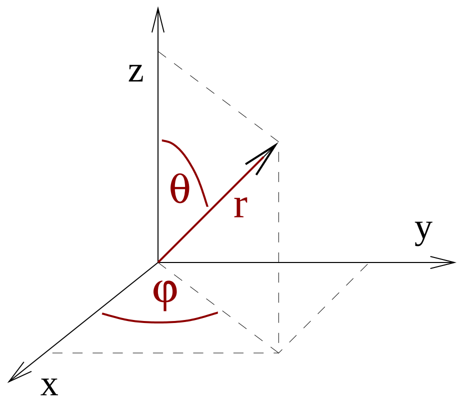
(b) Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Radius R und Höhe h mittels des Integrals

$$V_{\mathrm{Z}} = \int_0^R \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z\ 1 \cdot \rho$$

(c) Integrieren Sie das Volumen $V_{\mathrm{Ke}} = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \rho\,.$
Dies entspricht dem Rauminhalt welcher geometrischen Figur?

(d) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Zylinders mit Radius R, Höhe h, und konstanter Dichte D, der um seine Symmetrie (Längsachse) rotiert.

Aufgabe 26: Kugelkoordinaten *(5 Punkte)*



Der Zusammenhang von Kartesischen und Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \sin \varphi \\ y &= r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten ist das Volumenelement gegeben durch $\mathrm{d}V = r^2 \sin \vartheta \cdot \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r$, sodass

$$\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\ f(x, y, z) \quad = \quad \int \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, f(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \sin \vartheta$$

wobei $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le \vartheta \le \pi$.

(a) Bestimmen Sie r, ϑ, und φ als Funktionen von x, y, z.

(b) Berechnen Sie das Kugelvolumen $V_{\mathrm{Ku}} = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta\ r^2 \sin \vartheta$

(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel mit konstanter Dichte, die um ihre Symmetrieachse rotiert.