Dozent: Prof. Dr. G. Burkard
Übungen: Braun, Kahlert, & Wegewijs
WS07/08, Nr. **07ws-04673**

Einführung in die Theoretische Physik

Übungsblatt 10

Abgabe: Montag, 21.01.08
Besprechung: Freitag, 25.01.08

Aufgabe 40 : Kepler Bahnkurven *(7 Punkte)*

Wir betrachten die Bahn einer Punktmasse (z.B. Astronaut), angezogen durch ein Kraftzentrum (z.B. Planet). Die relative Koordinate der Punktmasse ist $\mathbf{r}(t)$ und beschreibt eine Bahnkurve als Funktion der Zeit t.

Benutzen Sie nirgendwo, ausser in Teilaufgabe (g), die Komponenten-Schreibweise für Vektoren!

(a) Wir betrachten den Vektor des so genannten Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ wobei $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$. Skizzieren Sie eine beliebige Bahnkurve und geben Sie an, in welche Richtung $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{L}$ zeigen. Beschreiben Sie zusätzlich in Worten, was Sie über die relativen Winkel der 3 Vektoren sagen können.

(b) Die Bahnkurve wird bestimmt durch die Differentialgleichung

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = -\frac{k}{r(t)^2}\hat{\mathbf{r}}(t) \tag{1}$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ und $r = |\mathbf{r}|$. Zeigen Sie, dass entlang dieser Bahnkurve $\mathbf{L}$ ein konstanter Vektor der Zeit ist, d.h. zeigen Sie $\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$

(c) Zeigen Sie jetzt, dass für *beliebige Vektor-Funktionen* (also nicht nur entlang die Bahnkurve bestimmt durch die Gleichung (1) gilt

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\hat{\mathbf{r}}} \tag{2}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{r}}} = 0 \tag{3}$$

und damit

$$\mathbf{L} = mr^2\hat{\mathbf{r}} \times \dot{\hat{\mathbf{r}}} \tag{4}$$

(d) Benutzen Sie das Ergebnis von (c) und zeigen Sie, dass entlang der Bahnkurve gilt

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{L}(t)) = k\,\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) \tag{5}$$

Benutzen Sie dabei, dass für drei beliebige Vektoren gilt: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

(e) Zeigen Sie, dass $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = k\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{C}$ wobei $\mathbf{C}$ ein konstanter Vektor ist und damit

$$L^2 = |\mathbf{L}|^2 = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = mr(k + C\cos\theta) \tag{6}$$

wobei $C = |\mathbf{C}|$ und θ der Winkel zwischen $\mathbf{C}$ und $\mathbf{r}$ ist. Benutzen Sie dabei, dass $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$

(f) Bestimmen Sie damit $r(\theta)$. Was ist der maximale und minimale Abstand r zwischen Massenpunkt und Kraftzentrum?

(g) Skizzieren Sie die Bahnkurve für den Fall $\mathbf{C} = (C, 0, 0)$ und $\mathbf{r} = (x, y, 0)$. Beachte, dass $k > 0$.

Aufgabe 41 : Hängendes Seil *(5 Punkte)*

Wir betrachten die Form eines hängenden Seils mit vernachlässigbarem Durchmesser. Das Seil hängt in der (x, y) Ebene herunter und ist an den Punkten $(\pm b, 0)$ befestigt. Die Funktion $y(x)$ beschreibt für $-b \leq x \leq b$ die Position der Punkte auf dem Seil:

$$y(x) \quad = \quad \frac{\cosh(\lambda x) - \cosh(\lambda b)}{\lambda} \tag{7}$$

wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist.
Berechnen Sie die Länge L des Seils ausgedrückt in λ und b.
Hinweis: wie drückt man $(\sinh(x))^2$ durch $(\cosh(x))^2$ aus?
Bemerkung: Die spezielle cosh-Form des Seils garantiert, dass sich die internen horizontalen Kräfte genau aufheben. Schon im Altertum wusste man das: Bogen wurden oft mit dieser besonders stabilen Form hergestellt!

Aufgabe 42 : Differential–Operatoren *(8 Punkte)*

Hinweis: benutzen Sie hier die Komponenten-Schreibweise für Vektoren, d.h. $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$.
Berechnen Sie für die folgenden Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{f}$ und Rotation $\nabla \times \mathbf{f}$:

(a) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$

(b) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/\sqrt{\epsilon + r^2}$

(c) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (-y, x, 0)$

(d) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = (-y, x, 0)/\sqrt{\epsilon + x^2 + y^2}$